CS (MAIN) Exam:2016

M–ESC–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1\. (a) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से A^{-1} निकालिये।

Using elementary row operations, find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 6

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ है, तो $A^{14} + 3A - 2I$ का मान निकालिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, then find $A^{14} + 3A - 2I$. 4

(b) (i) प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से वह शर्त निकालिये, जिससे कि प्रथम-घातीय समीकरणों (linear equations)

$$x - 2y + z = a$$
$$2x + 7y - 3z = b$$
$$3x + 5y - 2z = c$$

का एक हल हो।

Using elementary row operations, find the condition that the linear equations

$$x - 2y + z = a$$
$$2x + 7y - 3z = b$$
$$3x + 5y - 2z = c$$

have a solution. 7

(ii) यदि

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y - 2z = 0\}$$
$$W_3 = \{(x, y, z) \mid x - 7y + 3z = 0\}$$

तो $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ तथा $\dim(W_1 + W_2)$ का मान निकालिये।

If

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + y - 2z = 0\}$$
$$W_3 = \{(x, y, z) \mid x - 7y + 3z = 0\}$$

then find $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ and $\dim(W_1 + W_2)$. 3

(c) मान निकालिये :

Evaluate : 10

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$$

(d) उस गोले (sphere) का समीकरण निकालिये, जो वृत्त $x^2+y^2=4;\ z=0$ से गुजरता है और जो तल $x+2y+2z=0$ से एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 3 है, में काटा जाता है।

Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2+y^2=4;\ z=0$ and is cut by the plane $x+2y+2z=0$ in a circle of radius 3. 10

(e) रेखाओं $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=z-3$ तथा $y-mx=z=0$ के बीच लघुतम दूरी (shortest distance) निकालिये। m के किस मान के लिए दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद (intersect) करेंगी?

Find the shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=z-3$ and $y-mx=z=0$. For what value of m will the two lines intersect? 10

2. (a) (i) यदि $M_2(R)$, 2×2 कोटि (order) के वास्तविक आव्यूहों की समष्टि (space) तथा $P_2(x)$, वास्तविक बहुपदों (polynomials), जिनकी अधिकतम घात (degree) 2 है, की समष्टि (space) हो, तो $T: M_2(R) \to P_2(x)$, जहाँ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+c+(a-d)\,x+(b+c)x^2$, का $M_2(R)$ एवं $P_2(x)$ के मानक आधारों (standard bases) के सापेक्ष आव्यूह निरूपित कीजिये। इसके अलावा T का शून्य समष्टि (null space) प्राप्त कीजिये।

If $M_2(R)$ is space of real matrices of order 2×2 and $P_2(x)$ is the space of real polynomials of degree at most 2, then find the matrix representation of $T: M_2(R) \to P_2(x)$, such that $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+c+(a-d)\,x+(b+c)x^2$, with respect to the standard bases of $M_2(R)$ and $P_2(x)$. Further find the null space of T. 10

(ii) यदि $T: P_2(x) \to P_3(x)$ इस प्रकार है कि $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\,dt$, तो $\{1,\ 1+x,\ 1-x^2\}$ एवं $\{1, x, x^2, x^3\}$ को क्रमशः $P_2(x)$ एवं $P_3(x)$ का आधार (bases) लेते हुए T का आव्यूह निकालिये।

If $T: P_2(x) \to P_3(x)$ is such that $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\,dt$, then choosing $\{1,\ 1+x,\ 1-x^2\}$ and $\{1, x, x^2, x^3\}$ as bases of $P_2(x)$ and $P_3(x)$ respectively, find the matrix of T. 6

(b) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A के अभिलक्षणिक मान (eigenvalues) तथा अभिलक्षणिक सदिशों (eigenvectors) को निकालिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the eigenvalues and eigenvectors of A. 8

(ii) सिद्ध कीजिये कि हर्मिटी (Hermitian) आव्यूह के सभी अभिलक्षणिक मान वास्तविक हैं।

Prove that eigenvalues of a Hermitian matrix are all real. 8

(c) यदि आधारों (bases) $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ एवं $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण (linear transformation) $T : P_2(x) \to P_2(x)$ के तहत आव्यूह निरूपण $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो T प्राप्त कीजिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is the matrix representation of a linear transformation $T : P_2(x) \to P_2(x)$ with respect to the bases $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ and $\{1, 1+x, 1+x^2\}$, then find T. 18

3. (a) $x^2+y^2+z^2$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिये, जहाँ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ तथा $x+y-z=0$ हो।

Find the maximum and minimum values of $x^2+y^2+z^2$ subject to the conditions $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ and $x+y-z=0$. 20

(b) मान लीजिये

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y-5x^2y^2+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\delta > 0$ प्राप्त कीजिये इस प्रकार कि $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, जब $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ हो।

Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y - 5x^2y^2 + y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find a $\delta > 0$ such that $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, whenever $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. 15

(c) तल $x + 2y + 2z = 12$ के $x = 0$, $y = 0$ तथा $x^2 + y^2 = 16$ द्वारा काटे गये क्षेत्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) निकालिये।

Find the surface area of the plane $x + 2y + 2z = 12$ cut off by $x = 0$, $y = 0$ and $x^2 + y^2 = 16$. 15

4. (a) एक रेखा, जो रेखाओं $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ को प्रतिच्छेद (intersect) करती है तथा तल $x + y = 0$ के समानान्तर है, द्वारा जनित सतह (surface generated) निकालिये।

Find the surface generated by a line which intersects the lines $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ and parallel to the plane $x + y = 0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि शंकु (cone) $3yz - 2zx - 2xy = 0$ के तीन परस्पर लम्बीय जनकों (generators) का एक अनन्त समुच्चय है। यदि $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ ऐसे किसी समुच्चय का एक जनक (generator) हो, तो बाकी दो निकालिये।

Show that the cone $3yz - 2zx - 2xy = 0$ has an infinite set of three mutually perpendicular generators. If $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ is a generator belonging to one such set, find the other two. 10

(c) $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ का मान निकालिये, जहाँ आयत $R = [0, 1; 0, 1]$ तथा

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है।

Evaluate $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ over the rectangle $R = [0, 1; 0, 1]$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

15

(d) शांकवज (conicoid) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन पारस्परिक लम्बीय स्पर्शी तलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दुपथ निकालिये।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 15

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{x/2} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$ का विशेष समाकल (particular integral) निकालिये।

Find a particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{x/2} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ एक त्रिभुज की भुजाएँ बना सकते हैं। इस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई निकालिये।

Prove that the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ can form the sides of a triangle. Find the lengths of the medians of the triangle. 10

(c) हल कीजिये :

Solve : 10

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}(e^{\tan^{-1}x} - y)$$

(d) दर्शाइये कि परवलय-कुल $y^2 = 4cx + 4c^2$ स्वलांबिक (self-orthogonal) है।

Show that the family of parabolas $y^2 = 4cx + 4c^2$ is self-orthogonal. 10

(e) एक कण केन्द्रीय त्वरण (central acceleration), जो दूरी के त्रिघात के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है, के तहत चलायमान है। यदि इसे मूलबिन्दु (origin) से दूरी a पर एक स्तब्धिका (apse) से उस वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, जो कि a त्रिज्या के वृत्त के वेग का $\sqrt{2}$ गुना है, तो पथ का समीकरण निकालिये।

A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance. If it is projected from an apse at a distance a from the origin with a velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius a, then find the equation to the path. 10

6. *(a)* हल कीजिये :

Solve : 10

$$\{y(1 - x\tan x) + x^2 \cos x\}\,dx - x\,dy = 0$$

(b) अवकल समीकरण (differential equation)

$$(D^2 + 2D + 1)\,y = e^{-x}\log(x), \qquad \left[D \equiv \frac{d}{dx}\right]$$

को प्राचल-विचरण (variation of parameters) विधि से हल कीजिये।

Using the method of variation of parameters, solve the differential equation

$$(D^2+2D+1)\,y = e^{-x}\log(x), \qquad \left[D \equiv \frac{d}{dx}\right]$$ 15

(c) समीकरण $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4$ का व्यापक हल (general solution) निकालिये।

Find the general solution of the equation $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4$. 15

(d) लाप्लास रूपांतरण (Laplace transformation) की मदद से निम्न का हल निकालिये :

Using Laplace transformation, solve the following : 10

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

7. (a) $2a$ लम्बाई की एकसमान एक छड़ (rod) AB, A पर हिन्ज (hinge) के परितः चलायमान (movable) है, जिसका दूसरा छोर एक चिकनी ऊर्ध्व दीवार पर स्थित है। यदि छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव α हो, तो सिद्ध कीजिये कि हिन्ज (hinge) पर प्रतिक्रिया (reaction) का परिमाण $\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$ है, जहाँ W छड़ का भार है।

A uniform rod AB of length $2a$ movable about a hinge at A rests with other end against a smooth vertical wall. If α is the inclination of the rod to the vertical, prove that the magnitude of reaction of the hinge is

$$\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$$

where W is the weight of the rod. 15

(b) दो भार P तथा Q एक स्थिर (fixed) बिन्दु O से धागे (strings) OA एवं OB से लटके हैं तथा एक हल्के छड़ (rod) AB द्वारा एक-दूसरे से अलग किये गये हैं। यदि धागे OA एवं OB छड़ (rod) AB से क्रमशः α तथा β कोण बनाते हों, तो सिद्ध कीजिये कि छड़ (rod) ऊर्ध्व दिशा से θ कोण बनाती है, जहाँ

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$

Two weights P and Q are suspended from a fixed point O by strings OA, OB and are kept apart by a light rod AB. If the strings OA and OB make angles α and β with the rod AB, show that the angle θ which the rod makes with the vertical is given by

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$ 15

(c) एक वर्ग $ABCD$, जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, को एक ऊर्ध्व तल (vertical plane) में स्थिर (fixed) किया जाता है, जिसकी दो भुजाएँ क्षैतिज हैं। एक अन्तहीन धागा (endless string), जिसकी लंम्बाई $l(>4a)$ है, बोर्ड के कोणों पर स्थित चार खूँटियों के ऊपर से एक रिंग (ring) के द्वारा गुजरता है। रिंग का भार W है और यह ऊर्ध्व दिशा में लटक रहा है। दर्शाइये कि धागे का तनाव $\dfrac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$ है।

A square $ABCD$, the length of whose sides is a, is fixed in a vertical plane with two of its sides horizontal. An endless string of length $l(>4a)$ passes over four pegs at the angles of the board and through a ring of weight W which is hanging vertically. Show that the tension of the string is $\dfrac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$. 20

8. (a) $f(r)$ निकालिये, इस प्रकार कि $\nabla f = \dfrac{\vec{r}}{r^5}$ तथा $f(1)=0$ हो।

Find $f(r)$ such that $\nabla f = \dfrac{\vec{r}}{r^5}$ and $f(1)=0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि

Prove that

$$\oint_C f\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla f$$ 10

(c) एक कण एक सरल रेखा में गतिमान है। इसका त्वरण सरल रेखा पर एक स्थिर (fixed) बिन्दु O की तरफ निर्देशित है तथा हमेशा $\mu\left(\dfrac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ के बराबर है, जब यह बिन्दु O से x दूरी पर है। यदि यह बिन्दु O से a दूरी पर शून्य वेग से गतिमान होता है, तो वह समय निकालिये जब कण O पर आएगा।

A particle moves in a straight line. Its acceleration is directed towards a fixed point O in the line and is always equal to $\mu\left(\dfrac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ when it is at a distance x from O. If it starts from rest at a distance a from O, then find the time, the particle will arrive at O. 15

(d) दर्शाइये कि कार्डिऑइड (cardioid) $r=a(1+\cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता-त्रिज्या (radius of curvature) का वर्ग r के समानुपाती है। $\theta = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$ पर वक्रता-त्रिज्या भी ज्ञात कीजिये।

For the cardioid $r=a(1+\cos\theta)$, show that the square of the radius of curvature at any point (r, θ) is proportional to r. Also find the radius of curvature if $\theta = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$. 15

★★★